

Fehlerrechnung

Aufgabe 1

Man leite die Beziehungen

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad \text{und} \quad b = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

aus den Angaben

$$\sum_{i=1}^N 2 \cdot (a + bx_i - y_i) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N 2 \cdot (a + bx_i - y_i) x_i = 0$$

im einzelnen ab und prüfe für den Fall $N = 2$ nach, ob sich die erwarteten Werte

$$a = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \quad \text{und} \quad b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ergeben.

$$\sum_{i=1}^N 2(a + bx_i - y_i) = 0$$

$$2 \cdot \sum_{i=1}^N (a + bx_i - y_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^N (a + bx_i - y_i) = 0$$

$$N \cdot a + b \cdot \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N y_i = 0$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N y_i - b \cdot \sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N 2 \cdot (a + bx_i - y_i)x_i = 0$$

$$a \cdot \sum_{i=1}^N x_i + b \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i y_i = 0$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - a \cdot \sum_{i=1}^N x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (2)$$

(2) in (1)

$$N \cdot a = \sum_{i=1}^N y_i - \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - a \cdot \sum_{i=1}^N x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \cdot \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\left(N \cdot a - \sum_{i=1}^N y_i \right) \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 = - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i + a \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i$$

$$N \cdot a \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^N y_i = a \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

$$N \cdot a \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - a \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

(1) in (2)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$b \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i - b \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

$$b \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i + b \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

$$b \cdot N \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 = N \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i + b \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i$$

$$b \cdot N \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - b \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i = N \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i$$

$$b = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i}$$

$$b = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

Für $N = 2$:

$$a = \frac{(y_1 + y_2) \cdot (x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2) \cdot (x_1 y_1 + x_2 y_2)}{2 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2}$$

$$a = \frac{x_1^2 y_1 + x_2^2 y_1 + x_1^2 y_2 + x_2^2 y_2 - x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - x_1 x_2 y_1 - x_2^2 y_2}{2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1^2 - 2x_1 x_2 - x_2^2}$$

$$a = \frac{x_2^2 y_1 + x_1^2 y_2 - x_1 x_2 y_2 - x_1 x_2 y_1}{x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2}$$

$$a = \frac{x_2 y_1 (x_2 - x_1) - x_1 y_2 (x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2}$$

$$a = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{(x_2 - x_1)}$$

$$b = \frac{2 \cdot (x_1 y_1 + x_2 y_2) - (x_1 + x_2) \cdot (y_1 + y_2)}{2 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - (x_1 + x_2)^2}$$

$$b = \frac{2x_1 y_1 + 2x_2 y_2 - x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_2}{2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1^2 - 2x_1 x_2 - x_2^2}$$

$$b = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2}$$

$$b = \frac{y_2 (x_2 - x_1) - y_1 (x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)^2}$$

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Aufgabe 2

Für die Größe W erhält man aus verschiedenen Versuchen die Werte

x_i	58.3	58.5	58.1	58.2	58.8	58.4	58.6	58.5
$x_i - \bar{x}$	- 0.13	0.07	- 0.33	- 0.23	0.37	- 0.03	0.17	0.07

Man berechne den Mittelwert, die Standardabweichung und den mittleren Fehler des Mittelwertes.

Mittelwert:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} = \frac{467.4}{8} = 58.43$$

Standardabweichung:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{0.3552}{7}} = 0.23$$

Standardabweichung des Mittelwertes:

$$S(\bar{x}) = \frac{S(x)}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 (x_i - \bar{x})^2}{N \cdot (N-1)}} = \sqrt{\frac{0.3552}{56}} = 0.08$$

Aufgabe 3

Eine Kugel bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit u auf einer linearen Bahn. Zu mehreren Zeiten t_i wird der Abstand z_i der Kugel von einem Bezugspunkt aus gemessen. Man erhält die folgenden Werte:

t_i in s	0	1	2	3	4	5	6
z_i in cm	2.1	4.7	7.6	11.8	14.1	16.5	20.4

Für die Bewegung der Kugel gilt:

$$z_i = z_0 + u \cdot t_i$$

Man bestimme u und z_0 . Man gebe den Wert der Fehlerquadratsumme, die Standardabweichung von z_i sowie die mittleren Fehler von u und z_0 an.

$$\sum_{i=1}^7 t_i = 21 \text{ s} \quad \sum_{i=1}^7 z_i = 77.2 \text{ cm} \quad \sum_{i=1}^7 t_i \cdot z_i = 316.6 \text{ cm} \cdot \text{s} \quad \sum_{i=1}^7 t_i^2 = 91 \text{ s}^2$$

$$z_0 = \frac{\sum_{i=1}^N t_i^2 \cdot \sum_{i=1}^N z_i - \sum_{i=1}^N t_i \cdot \sum_{i=1}^N t_i z_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N t_i \right)^2} = \frac{77.2 \cdot 91 - 21 \cdot 316.6}{7 \cdot 91 - 21^2} = \frac{376.6}{196} = 1.921 \text{ cm}$$

$$u = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N t_i z_i - \sum_{i=1}^N t_i \cdot \sum_{i=1}^N z_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N t_i \right)^2} = \frac{7 \cdot 316.6 - 21 \cdot 77.2}{7 \cdot 91 - 21^2} = \frac{595}{196} = 3.036 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Regressionsgerade:

$$z_i = 1.921 + 3.036 \cdot t_i$$

t_i in s	0	1	2	3	4	5	6
z_i in cm	2.1	4.7	7.6	11.8	14.1	16.5	20.4
\bar{z}_i in cm	1.92	4.96	7.99	11.03	14.07	17.10	20.13
S	0.0324	0.0676	0.152	0.5929	0.0009	0.3600	0.0729

Fehlerquadratsumme:

$$S = \sum_{i=1}^7 (\bar{z}_i - z_i)^2 = 1.28 \text{ cm}^2$$

Standardabweichung:

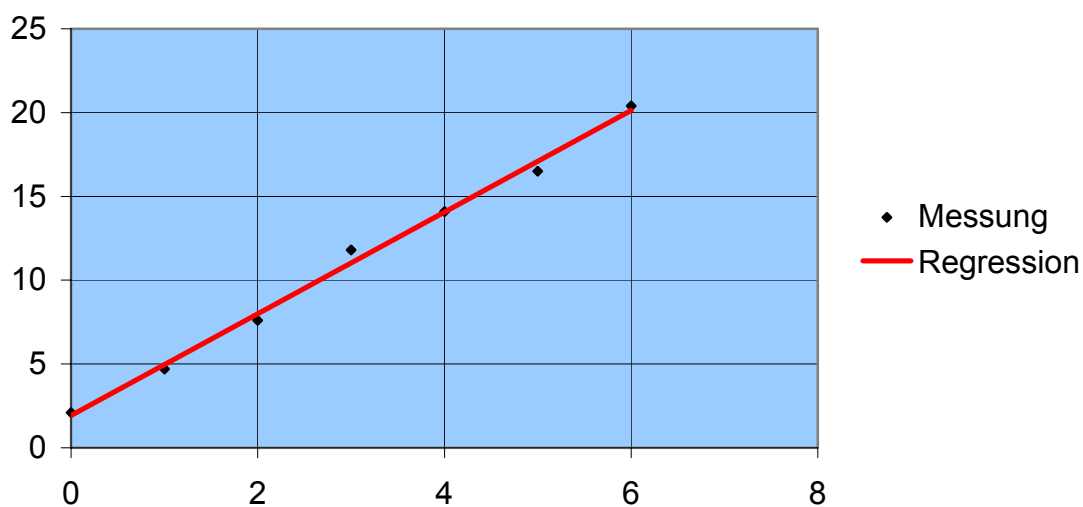
$$S_{z_i} = \sqrt{\frac{S}{N-2}} = \sqrt{\frac{1.28}{5}} = 0.51 \text{ cm}$$

Mittlerer Fehler von z_0 :

$$m_{z_0} = S_{z_i} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^7 t_i^2}{N \cdot \sum_{i=1}^7 t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^7 t_i\right)^2}} = 0.51 \cdot \sqrt{\frac{91}{7 \cdot 91 - 21^2}} = 0.35 \text{ cm}$$

Mittlerer Fehler von u :

$$m_u = S_{z_i} \cdot \sqrt{\frac{N}{N \cdot \sum_{i=1}^7 t_i^2 - \left(\sum_{i=2}^7 t_i\right)^2}} = 0.51 \cdot \sqrt{\frac{7}{7 \cdot 91 - 21^2}} = 0.096 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$



Aufgabe 4

Nach dem Gesetz von Hagen-Poiseuille hängt die Strömungsgeschwindigkeit v eines Gases durch ein Rohr mit dem Innendurchmesser d über die Beziehung

$$v = \text{const} \cdot d^4$$

zusammen. d wurde zu 0.2 ± 0.01 mm bestimmt. Wie groß ist der relative Fehler von v ?

$$\Delta v_{\text{rel}} = \frac{4 \cdot \Delta d_{\text{abs}}}{d} = \frac{4 \cdot 0.01 \text{ mm}}{0.2 \text{ mm}} = 0.2 = 20\%$$

Aufgabe 5

Um einen elektrischen Widerstand nach der Formel $R = \frac{U}{I}$ zu bestimmen, werden je 10 Messungen von U und I vorgenommen.

Messung	Stromstärke I in A	Spannung U in V
1	4.4	221
2	4.2	222
3	4.3	219
4	4.3	221
5	4.1	219
6	4.0	218
7	4.5	220
8	4.3	221
9	4.4	220
10	4.3	219

Wie groß ist der Mittelwert, die Streuung der einzelnen Messung und der mittlere Fehler des Mittelwertes von I und U ?

Wie groß ist bei der Messung von I und U jeweils der relative Fehler?

Wie groß ist der Mittelwert und der mittlere Fehler in R ?

Geben Sie die Ergebnisse für die statistische Sicherheit $P = 0.95$ an.

Messung	I in A	$v_{i_I} = I_i - \bar{I}$	U in V	$v_{i_U} = U_i - \bar{U}$	$R = \frac{U}{I}$	$v_{i_R} = R_i - \bar{R}$
1	4.4	0.12	221	1	50.23	- 1.23
2	4.2	- 0.08	222	2	52.86	1.40
3	4.3	0.02	219	- 1	50.93	- 0.53
4	4.3	0.02	221	1	51.40	- 0.06
5	4.1	- 0.18	219	- 1	53.41	1.95
6	4.0	- 0.28	218	- 2	54.50	3.04
7	4.5	0.22	220	0	48.89	- 2.57
8	4.3	0.02	221	1	51.40	- 0.06
9	4.4	0.12	220	0	50.00	- 1.46
10	4.3	0.02	219	- 1	50.93	- 0.53
	$\bar{I} = 4.28$	0.196	$\bar{U} = 220$	14	$\bar{R} = 51.46$	25.82
	Mittelwert	$\sum (v_{i_I})^2$	Mittelwert	$\sum (v_{i_U})^2$	Mittelwert	$\sum (v_{i_R})^2$

Streuung der einzelnen Messung:

$$S(I) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (v_{i_I})^2}{10-1}} = \sqrt{\frac{0.196 \text{ A}^2}{9}} = 0.148 \text{ A}$$

$$S(U) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (v_{i_U})^2}{10-1}} = \sqrt{\frac{14 \text{ V}^2}{9}} = 1.25 \text{ V}$$

$$S(R) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (v_{i_R})^2}{10-1}} = \sqrt{\frac{25.82 \Omega^2}{9}} = 1.69 \Omega$$

Streuung des Mittelwertes:

$$S(\bar{I}) = \frac{S(I)}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (v_{i_I})^2}{10 \cdot (10-1)}} = \sqrt{\frac{0.196 \text{ A}^2}{90}} = 0.05 \text{ A}$$

$$S(\bar{U}) = \frac{S(U)}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (v_{i_U})^2}{10 \cdot (10-1)}} = \sqrt{\frac{14 \text{ V}^2}{90}} = 0.39 \text{ V}$$

$$S(\bar{R}) = \frac{S(R)}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (v_{i_R})^2}{10 \cdot (10-1)}} = \sqrt{\frac{25.82 \text{ } \Omega^2}{90}} = 0.53 \text{ } \Omega$$

Relativer Fehler der Messung:

$$\Delta I_{\text{rel}} = \frac{t \cdot S(\bar{I})}{\bar{I}} \cdot 100 \% = \frac{2.26 \cdot 0.05 \text{ A}}{4.28 \text{ A}} \cdot 100 \% = 2.6 \%$$

$$I_W = 4.28 \text{ A} \pm (2.26 \cdot 0.05 \text{ A}) = 4.28 \text{ A} \pm 0.11 \text{ A}$$

$$\Delta U_{\text{rel}} = \frac{t \cdot S(\bar{U})}{\bar{U}} \cdot 100 \% = \frac{2.26 \cdot 0.39 \text{ V}}{220 \text{ V}} \cdot 100 \% = 0.4 \%$$

$$U_W = 220 \text{ V} \pm (2.26 \cdot 0.39 \text{ V}) = 220 \text{ V} \pm 0.88 \text{ V}$$

Dieses Protokoll wurde selbstständig erstellt.

Benjamin Bulheller